Uživatelsky přístupnější výklad oceňování opcí

Michal Dvorak

Katedra měnové teorie a politiky, Vysoká škola ekonomická v Praze

Květěn, 2014

Abstrakt

Oceňování opcí obecně není jednoduchou záležitostí. K tomuto dojmu přispívá i vysoce matematizovaná forma Black-Scholesova modelu, která není mnohým uživatelům či studentům přístupná. Přesto základní logika ocenění není složitá. Zde proto přinášíme intuitivnější výklad oceňování opcí pomocí modelu postaveného na stejných základech jako Black-Scholesův model. Jsou vysvětleny a numericky ilustrovány faktory, které ovlivňují cenu evropských měnových opcí. Kromě výuky může být model vhodný i jako výchozí bod pro další rozvoj teorie oceňování opcí.

1 Úvod

Oceňování opcí je poměrně komplikované. U jiných derivátů, například forwardů nebo futures, u kterých při (rizikově neutrálním[1]) oceňování stačí stanovit očekávanou hodnotu podkladové veličiny v okamžiku splatnosti. Výnos z opce však závisí jen na této očekávané hodnotě, nýbrž závisí na *všech* hodnotách podkladové veličiny v momentu expirace. Je proto nutné pracovat s možnými scénáři vývoje podkladové veličiny. Práce s těmito scénáři je jednak komplikovanější než stanovení očekávané hodnoty a vede i k nejednoznačnosti ocenění, protože různí autoři a různé modely mohou docházet ke scénářům mírně odlišným.

Pro oceňování opcí se tradičně používá Black-Scholesův (nazývaný též Black-Scholes-Mertonův) model. K oceňování měnových opcí se používá jeho následující konkrétnější podoba. [2] Předpokládejme, že oceňujeme call, respek-

[1]Tj. oceňování pohledem subjektu, který je rizikově neutrální. Pro takového investora je důležitá pouze očekávaná hodnota výnosu a nikoli velikost obousměrného kolísání výnosů v jednotlivých scénářích kolem této hodnoty. Investor tak hodnotí stejně jistý zisk 100 a zisk 50 nebo 150 při 50% pravděpodobnostech.

[2]Durčáková a Mandel (2007, s. 198) ho nazývají Biger-Hullovým(1983), Pilbeam (2006, s. 346) nazývá vzorec Garman-Kohlhagenovým (1983) a Hull(2007) zůstává u implicitního označení Black-Scholes-Mertonův podle článků Black a Scholes (1973) a Merton (1973). Rozdíl oproti obecnému Black-Scholesovu modelu spočívá v tom, že výnos z podkladového aktiva (např. dividenda u akcií při oceňování akciových opcí) je nahrazen výnosem z obchodované měny, tedy úrokovou sazbou (zde r_{EUR}).

tive put opci na nákup, respektive prodej EUR za CZK.

$$c = S_{\mathrm{CZK/EUR}} \cdot \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{EUR}} \cdot T} \cdot N(d_1) - K_{\mathrm{CZK/EUR}} \cdot \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{CZK}} \cdot T} \cdot N(d_2), \tag{1}$$

$$p = K_{\mathrm{CZK/EUR}} \cdot \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{CZK}} \cdot T} \cdot N(-d_2) - S_{\mathrm{CZK/EUR}} \cdot \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{EUR}} \cdot T} \cdot N(-d_1), \tag{2}$$

$$\text{kde } d_1 = \frac{\ln \frac{S_{\mathrm{CZK/EUR}}}{K_{\mathrm{CZK/EUR}}} + (r_{\mathrm{CZK}} - r_{\mathrm{EUR}} + \frac{\sigma^2_{S_{\mathrm{CZK/EUR}}}}{2}) \cdot T}{\sigma_{S_{\mathrm{CZK/EUR}}} \cdot \sqrt{T}} \tag{3}$$

$$\text{a} d_2 = \frac{\ln \frac{S_{\mathrm{CZK/EUR}}}{K_{\mathrm{CZK/EUR}}} + (r_{\mathrm{CZK}} - r_{\mathrm{EUR}} - \frac{\sigma^2_{S_{\mathrm{CZK/EUR}}}}{2}) \cdot T}{\sigma_{S_{\mathrm{CZK/EUR}}} \cdot \sqrt{T}}, \tag{4}$$

přičemž c, resp. p je výsledná cena call, respektive put opce (opční prémie), $K_{\mathrm{CZK/EUR}}$ je realizační cena, $S_{\mathrm{CZK/EUR}}$ je současný spotový kurz, r_{CZK} je úroková sazba na CZK, r_{EUR} je úroková sazba na EUR, $\sigma_{S_{\mathrm{CZK/EUR}}}$ je budoucí volatilita spotového kurzu, měřená směrodatnou odchylkou na roční bázi a T je doba v letech do expirace opce. $N(\cdot)$ je kumulativní distribuční funkce normálního rozdělení se střední hodnotou 0 a směrodatnou odchylkou 1 a značí, jaká je pravděpodobnost, že takto normálně rozdělená veličina nabude nižší hodnoty než je číslo v závorce (tj. výsledkem je číslo mezi nulou a jedničkou).

Z této oceňovací rovnice je možné přímo stanovit cenu jakékoli evropské[3] opce. Též je možné zjistit, jaké veličiny mají na cenu opce c a p vliv a i vyzkoumat kvantitativně jaký[4]. Směr působení veličin a důvod, proč právě tyto veličiny hrají roli, však ze vzorce nejsou zcela jasné. Navíc oceňovací předpis působí pro mnohé uživatele poněkud mysteriózním dojmem, zejména, jsou-li seznámeni pouze se samotným předpisem nebo je-li jim poskytnuta příslušná teorie ve velmi matematizované formě.

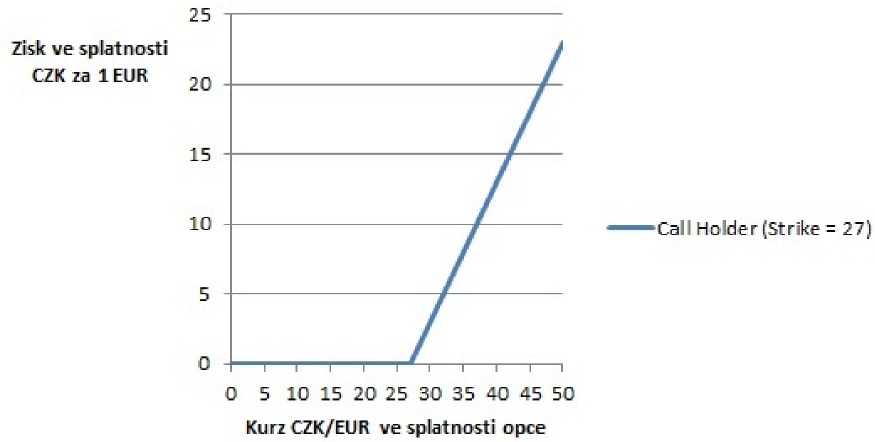
Hlavní motivací tohoto článku bude vysvětlit mechanismus oceňování opcí a hlavní faktory, které mají na cenu opcí vliv, přístupným způsobem. K tomu užijeme oceňovací model, který je postaven na stejné logice jako Black-Scholesův a směřuje i k velmi podobným hodnotám. Přestože je prezentovaný model uvažován za nejjednodušších předpokladů a realita je obyčejně komplikovanější, model ukazuje (1) obecný způsob, jak se k oceňování opcí a podobných typů derivátů přistupuje, (2) demonstruje vliv nejdůležitějších faktorů, které působí na ceny opcí a (3) poskytuje základ, který lze libovolně zesložitit, abychom dostali přesnější odhad.

Text je strukturován následujícím způsobem. V kapitole 2 je prezentován jednoduchý model oceňování evropských měnových opcí typu call. V kapitole 3 je demonstrován výpočet ceny opce na konkrétním příkladu. V kapitole 4 je zmíněn předpis pro ocenění evropské měnové opce typu put. Kapitola 5 diskutuje faktory, které mají vliv na ceny opcí a proč, včetně srovnání výsledků představeného modelu a Black-Scholesova modelu. Kapitola 6 dává přehled omezení modelu.

---

[3] Tj. opce, která skýtá právo nakoupit nebo prodat v jednom jediném okamžiku v budoucnosti. Vedle toho ještě existuje *asijská* opce, která dává toto právo ve více periodických okamžicích v průběhu životnosti opce (např. koncem každého měsíce) a *americká* opce, která umožňuje uplatnit právo kdykoli od vydání opce až do expirace. Pro stanovení hodnoty těchto opcí vzorce (1)-(4) přímo nestačí.

[4] Například derivací předpisu podle veličin, které nás zajímají.



Obrázek 1: Výnos z opce v momentu expirace c_T jako funkce spotového kurzu $S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}$ ($K_{\mathrm{CZK/EUR}} = 27$).

2 Model oceňování měnových opcí

Předpokládejme, že oceňujeme evropskou měnovou call opci na nákup EUR za CZK. Jak na to? Vyjděme ze známého. V momentu splatnosti (tj. pro $T = 0$) je hodnota opce zřejmá. Pokud např. spotový kurz bude 27,50 CZK/EUR a realizační cena call opce 27,00 CZK/EUR, může držitel opce získat 1 EUR realizací opce za 27,00 CZK a obratem jej prodat na spotovém trhu za 27,50 CZK, což znamená zisk 0,50 CZK na každém euru. Pokud bude spotový kurz nižší než realizační cena (např. 26,50 CZK/EUR), opce nebude využita a pro držitele bude mít nulovou hodnotu. Výnos z opce, a tedy její hodnota v momentu expirace c_T bude v závislosti na spotovém kurzu v okamžiku expirace $S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}$

$$c_T(S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}) = \max\left\{S_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - K_{\mathrm{CZK/EUR}}\ ;\ 0\right\}. \tag{5}$$

To lze graficky znázornit následujícím způsobem.

Pomocí této rovnice jsme schopni ocenit opci pro každou předpokládanou hodnotu spotového kurzu. Pokud bychom například s pravděpodobností 30% věděli, že $\dot{S}_{\mathrm{CZK/EUR,T}} = 26$ a se zbylou pravděpodobností 70 % bude $\ddot{S}_{\mathrm{CZK/EUR,T}} = 28$, pak můžeme vypočítat očekávaný výnos, tedy cenu opce ve splatnosti jako

$$c_T(S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}) = 0,3 \cdot \max\left\{\dot{S}_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - K\ ;\ 0\right\} + 0,7 \cdot \max\left\{\ddot{S}_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - K\ ;\ 0\right\} = \tag{6}$$

$$= 0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot 1 = 0,7. \tag{7}$$

Tato cena opce bz platila v momentu expirace. Protože opční prémie se platí teď a nikoli až při expiraci, má nyní opce hodnotu diskontované hodnoty ceny v expiraci (tj. nižší hodnotu). Pokud je např. česká úroková míra r_{CZK} 2 % p.a., použijeme-li složené úročení[5] a opce má půl roku do expirace $T = 0,5$, dnešní cena opce c_0 by byla

$$c_0(S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}) = \frac{c_T(S_{\mathrm{CZK/EUR,T}})}{(1 + r_{CZK})^T} = \tag{8}$$

$$= \frac{0,7}{1,02^{0,5}} = 0,693. \tag{9}$$

Z toho plyne, že ocenění opce je snadné, víme-li jaké rozdělení bude mít spotový kurz v okamžiku expirace. Složitá část na oceňování opcí je odhadnout, jak toto rozdělení bude vypadat.

Jak k popisu rozdělení přistoupit? Rozdělení lze obecně popsat střední hodnotou a velikostí kolísání (směrodatnou odchylkou). Střední hodnotu, tedy očekávanou hodnotu kurzu v momentu expirace lze pomocí nekryté úrokové parity (tj. neboli, jako forwardový kurz) odhadnout z úrokových sazeb na obě měny. Složitější je odhad variability. K tomu je vhodné diskutovat minulá data o vývoji spotového kurzu. Pohledem na ně lze zjistit, zda má kurz tendenci výrazně kolísat, a z toho získat představu, jak moc se kurz bude odchylovat od výše uvedené střední hodnoty. Nyní obojí prodiskutujme detailněji.

Předpokládejme opci s expirací za T let. Je-li dnes platná korunová úroková sazba se splatností T let r_{CZK} a eurová úroková sazba se splatností T let r_{CZK} a dnešní spotový kurz mezi korunou a eurem je $S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}$, pak na základě těchto fundamentů očekáváme, že kurz koruny a eura v momentu realizace opce (tj. za T let) bude

$$E_{\mathrm{CZK/EUR,T}} = S_{\mathrm{CZK/EUR,0}} \cdot \frac{(1 + r_{\mathrm{CZK}})^T}{(1 + r_{\mathrm{EUR}})^T}. \tag{10}$$

Pokud by tomu tak nebylo, investice v korunách by nebyla stejně výhodná jako konverze korun do eur, následná úložka v eurech a na konci období zpětná konverze do korun. Na trhu by pak panovala nerovnováha.

Volatilitu (směrodatnou odchylku) kurzu CZK/EUR vypočteme z dat pro kurz CZK/EUR za minulé roky. Dejme tomu, že použijeme denní data o kurzech střed (tj. nez bid-ask spreadů). Budeme se dívat na mezidenní procentní změny kurzu[6] Čím větší mezidenní změny kurzu, tím větší volatilita. Pro popis volatility použijeme směrodatnou odchylku mezidenních procentních změn, která je definována jako

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{H_i - H_{i-1}}{H_{i-1}} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\frac{H_i - H_{i-1}}{H_{i-1}}}{n-1} \right)^2}{n-1}}, \tag{11}$$

kde H_i jsou minulé hodnoty kurzu CZK/EUR v jednotlivých dnech a n je počet denních pozorování. Protože jsme volili velmi krátké období, dá se očekávat, že

[5] V oceňování derivátů a Black-Scholesově modelu se pracuje se spojitým úročením (nekonečně krátké úrokové období). Jmenovatel by pak nebyl $(1 + r_{\mathrm{CZK}})^T$, ale $e^{r_{\mathrm{CZK}} \cdot t}$. Rozdíl mezi oběma způsoby je pro menší úrokové sazby malý. Pro názornost v tomto článku užíváme složené úročení.

[6] Též by šlo zkoumat nikoli mezidenní procentní změny, ale kurzy jako takové. Zde užitý postup ale odpovídá Black-Scholesově modelu a poskytuje realističtější pohled na kurzový vývoj.

průměr mezidenních změn kurzu bude velmi blízký nule a ve vzorci jej můžeme pro jednoduchost zanedbat (Hull, 2009, 470).[7] Pak dospějeme ke vzorci pro volatilitu:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n}(\frac{H_i - H_i - 1}{H_i - 1})^2}{n-1}}. \tag{12}$$

Toto je však volatilita denní (protože jsme užili denní změny) a my potřebujeme volatilitu za T let. Pokud jsou denní změny vzájemně nezávislé, je možné[8] vyjádřit T-letou volatilitu jako

$$\sigma_T = \sigma_D \cdot \sqrt{252 \cdot T}, \tag{13}$$

tedy jako denní volatilitu vynásobenou odmocninou počtu obchodních dní do expirace, přičemž roční počet obchodních dní se obvykle uvádí 252. Intuitivně, s delším horizontem může dojít v výraznějšímu odchýlení se od střední hodnoty a proto volatilita musí růst. Na druhou stranu ale nelze počítat, že by všechny pohyby kurzu byly týmž směrem, takže volatilita bude se splatností růst pomaleji než proporcionálně.

Zde však máme volatilitu procentních změn kurzu a nikoli volatilitu samotného kurzu. Abychom mohli tento údaj poměřit s hodnotou kurzů ve splatnosti, musíme podniknout následující krok. Očekáváme-li hodnotu kurzu ve splatnosti $E_{\mathrm{CZK/EUR,T}}$ a dnes má spotový kurz hodnotu $S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}$, očekáváme procentní změnu kurzu za celé období

$$y_T = \frac{E_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}}{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}} = \frac{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}} \cdot \frac{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T}{(1+r_{\mathrm{EUR}})^T} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}}{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}} = \tag{14}$$

$$= \frac{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T}{(1+r_{\mathrm{EUR}})^T} - 1. \tag{15}$$

Budeme-li předpokládat, že rozdělení procentních změn za celé období $Tlet$ je normální, pak již máme dostatek informací pro jeho přesný popis, protože známe střední hodnotu i směrodatnou odchylku. Rozdělení změn tedy můžeme popsat jako normální rozdělení $\mathbb{N}(\mu, \sigma)$ se střední hodnotou $\mu = y_T$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = \sigma_T$:

$$y \sim N(y_T, \sigma_T) = \mathbb{N}\left(\frac{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T}{(1+r_{\mathrm{EUR}})^T} - 1; \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{n}(\frac{H_i - H_i - 1}{H_i - 1})^2}{n-1}} \cdot \sqrt{252 \cdot T}\right). \tag{16}$$

Pravděpodobnostní funkce tohoto rozdělení je funkce, která každé přípustné hodnotě výnosu $y \in \mathbb{R}$ přiřadí pravděpodobnost, že právě taková hodnota změny

[7]Na konkrétních datech bude vycházet průměr mezidenních změn nenulový. Je však otázka, zda důvodem není výběrová chyba – tj. že skutečný průměr mezidenních změn je nulový, pouze náš konkrétní výsek dat to neukazuje – a tedy zda použití nuly nejen usnadní výpočet, ale dá i přesnější odhad volatility.

[8]Mám-li k vzájemně nezávislých a stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou směrodatnou odchylkou s, pak náhodná veličina definovaná jako jejich součet má směrodatnou odchylku $s \cdot \sqrt{k}$.

kurzu za celé období nastane.[9] Proto lze pravděpodobnostní funkci zapsat jako funkci změn kurzu y, tedy $f(y)$.

Nyní máme připraveny všechny stavební bloky nutné k ocenění opce. Ve splatnosti očekáváme, že spotový kurz bude nabývat hodnot, které vzniknou tak, že k současnému známému spotovému kurzu $S_{\mathrm{CZK/EUR}}$ připočteme jeden ze scénářů procentní změny kurzu. Vážíme-li všechny takové případy pravděpodobností nastání, tedy pravděpobnostní funkcí $f(y)$, a vzniklý kurz poměříme se ziskem s opce v příslušném případě, získáme očekávanou (střední) hodnotu zisku opce ve splatnosti. Jinými slovy, získáme cenu opce ve splatnosti c_T:

$$
\begin{aligned}
c_T &= \mathbb{E}\left\{\max\left\{S_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - K_{\mathrm{CZK/EUR}}\ ;\ 0\right\}\right\} = && (17)\\
&= \mathbb{E}\left\{\max\left\{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}} \cdot (1+y) - K_{\mathrm{CZK/EUR}}\ ;\ 0\right\}\right\} = && (18)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot \max\left\{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}} \cdot (1+y)\ ;\ 0\right\} \mathrm{d}y, && (19)
\end{aligned}
$$

kde $\mathbb{E}$ je operátor střední hodnoty. Integrál v rovnici značí, že sčítáme vážené zisky ve všech možných případech změny kurzu.

Konečně, v okamžiku prodeje (tj. dnes) má opce hodnotu ve výši svého očekávaného zisku ve splatnosti (své očekávané ceny ve splatnosti c_T) po diskontování k současnosti diskontní mírou platnou pro korunový trh (r_{CZK}):

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{c_T}{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T} = && (20)\\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot \max\left\{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}} \cdot (1+y)\ ;\ 0\right\} \mathrm{d}y}{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T}. && (21)
\end{aligned}
$$

3 Numerická ilustrace

Předpokládejme, že oceňujeme evropskou call opci na nákup EUR s realizační cenou 27 CZK/EUR se splatností 3 dny. Dnešní spotový kurz je 27,4255 CZK/EUR, úrokové sazby na korunu se splatností 3 dny jsou 0,8 % p.a. a úrokové sazby na euro jsou 1 % p.a. Volatilita ohledně pohybů kurzu bude posouzena na základě dat o kurzech za posledních 5 dnů, která jsou následující.

Den	Kurz střed	Mezidenní změna	Mezidenní procentní změna
7.5.2014	27,4255	-0,0076	-0,0277%
6.5.2014	27,4331	-0,0029	-0,0106%
5.5.2014	27,436	-0,0144	-0,0525%
4.5.2014	27,4504	0,0057	0,0208%
3.5.2014	27,4447	–	–

Nejprve odhadněme volatilitu. Mezidenní změny kurzu jsou uvedeny v třetím sloupci tabulky. Mezidenní procentní změny jsou uvedeny ve čtvrtém sloupci. Směrodatná odchylka mezidenních procentních změn (je-li jejich průměr

[9] Pravděpodobnostní funkce je v daném případě funkce, která je definována tak, aby plocha pod ní dávala dohromady jedničku. Tudíž se může stát, že její hodnota v nějakém bodě je vyšší než 1, přestože jde o popis pravděpodobnosti.

předpokládán jako nulový) je

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{(-0,000277)^2 + (-0,000106)^2 + (-0,000525)^2 + (0,000208)^2}{4}} = 0,0003187 \quad (22)$$

Toto je denní směrodatná odchylka. Směrodatná odchylka za dobu splatnosti opce, tedy během 3 dnů, je:

$$\sigma_T = 0,0003187 \cdot \sqrt{3} = 0,000552. \quad (23)$$

Nyní přejděme k očekávané (střední) změně kurzu. Ta není dána minulými pohyby kurzů, ale současně platnými úrokovými sazbami.[10] Spotový kurz ve splatnosti opce předpokládáme na úrovni podle nekryté úrokové parity:

$$E_{\mathrm{CZK/EUR,T}} = S_{\mathrm{CZK/EUR,T}} \cdot \frac{(1 + r_{\mathrm{CZK}})^{3/360}}{(1 + r_{\mathrm{EUR}})^{3/360}} = \quad (24)$$

$$= 27,4255 \cdot \frac{(1 + 0,008)^{3/360}}{(1 + 0,01)^{3/360}} = 27,4250. \quad (25)$$

Protože jsou korunové sazby nižší než eurové, aby úroková parita platila, musí být očekávána apreciace koruny. Očekávaná procentní změna kurzu za celé období je tudíž dána jako

$$y_T = \frac{E_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}}{S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}} = \quad (26)$$

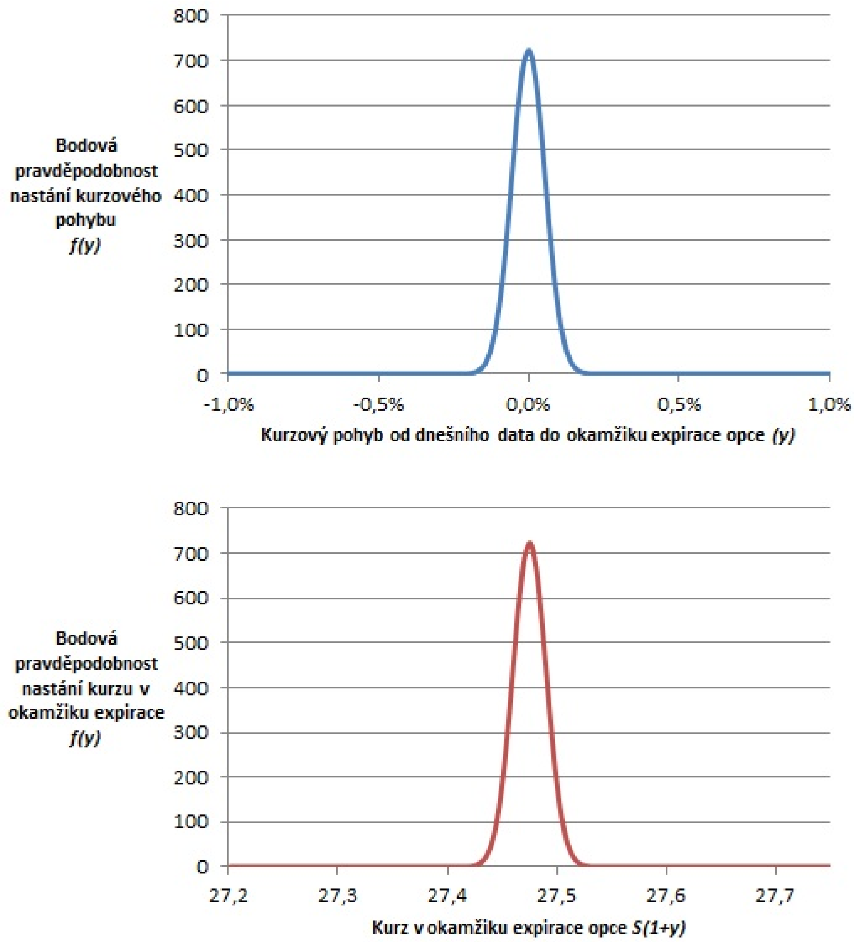
$$= \frac{27,4250 - 27,4255}{27,4255} = \frac{-1}{54851}. \quad (27)$$

Rozdělení procentních změn za celé období má proto střední hodnotu $\frac{-1}{54851}$ a směrodatnou odchylku $0,000552$. Nyní pro každou reálnou hodnotu procentní změny y (tj. od mínus nekonečna do plus nekonečna[11]) sestrojme hodnotu kurzu ve splatnosti, kterou taková změna zapříčiní, tj. $(1 + y) \cdot S_{\mathrm{CZK/USD}}$.

Se znalostí pravděpodobnostního rozdělení zjistíme pro každou hodnotu procentní změny (respektive s ní spojeného konečného kurzu), jaká je pravděpodobnost jejího nastání. Výsledek je pro hodnoty změn od -1 % do 1 %, respektive pro tomu odpovídající hodnoty kurzu $27,4255 \cdot 0,99 \cong 27,15$ a $27,4255 \cdot 1,01 \cong 27,70$ ukázán v následujících grafech. Každému kurzu v okamžiku realizace opce můžeme přiřadit odpovídající zisk (tedy rozdíl mezi tímto kurzem a realizační cenou, je-li kladný, a v ostatních případech nula) z opce. Vážením zisku z opce pravděpodobností jeho nastání získáme cenu opce v okamžiku expirace 0,425 CZK.

[10] Samozřejmě by bylo možné použít prodloužení minulých časových řad; pro krátké horizonty by tento způsob mohl vést i k přesnějším výsledkům. Pro střededobé a dlouhodobé horizonty by byl obecně výhodnější způsob užívající úrokové sazby. V Black-Scholesově modelu je použit úrokový difrenciál, v našem modelu jej použijeme též.

[11] Kurz samozřejmě nemůže poklesnout do záporných hodnot, a tudíž je pohyb kurzu směrem dolů omezen poklesem ve výši 100% a nižší poklesy jsou nesmyslné. V praxi ale pravděpodobnost 100% poklesu je nulová, tudíž je jedno, zda budou počítány i menší hodnoty.



Obrázek 2: Rozdělení pravděpodobností kurzového pohybu a s tím spojeného kurzu v okamžiku expirace.

Diskontování této hodnoty k současnosti diskontní mírou $r_{\mathrm{CZK}} = 0,008$ po dobu 3 dní, tj. $T = \frac{3}{360}$ vede k ceně opce

$$c_0 = \frac{c_T}{(1 + r_{\mathrm{CZK}})^T} = \frac{0,425}{(1 + 0,008)^{3/360}} = 0,42497 \cong 0,425 \text{ CZK.} \qquad (28)$$

Cena call opce (opční prémie) s realizační cenou 27 CZK/EUR je (podle tohoto modelu) 0,425 CZK na 1 EUR.

Protože krok s pravděpodobnostními funkcemi nebyl zcela názorný, ukážeme jej ještě jinak. Pro vyšší přehlednost nyní rozdělíme možné změny kurzu (které mohou být teoreticky od mínus nekonečna do nekonečna, prakticky však budou v pásmu kolem nuly) na intervaly a spočteme pravděpodobnosti, že hodnota procentní změny spadne do příslušného pásma.

Z (kumulativní distribuční funkce) normálního rozdělení (při střední hodnotě rovné očekávané procentní změně a směrodatné odchylce rovné směrodatné odchylce minulých dat) platí, že procentní změna menší (tj. nižší růst nebo vyšší pokles) než hodnota uvedená v levém sloupci tabulky nastává s pravděpobností uvedenou v pravém sloupci tabulky.

Hodnota k	Pravděpodobnost, že změna (růst) bude nižší $\Pr\{y < k\}$
$-\infty$	0
-0,09%	5,51%
-0,05%	19,14%
-0,02%	37,10%
0,02%	65,37%
0,05%	82,61%
0,09%	95,19%
∞	1

Mezi těmito 8 hodnotami leží 7 intervalů. Nyní je potřeba vymezit střed těchto intervalů. U všech intervalů s výjimkou krajních položíme střed jako jejich průměr. U krajích hodnot použijeme hodnoty -0,10% a 0,10%. Pak vymezíme pravděpodobnosti, že procentní změna spadne do příslušného intervalu, a sice jako rozdíl pravděpodobností v pravém sloupci předchozí tabulky. Například, je-li pravděpodobnost, že $y < -0,09\%$ rovna 5,51% a pravděpodobnost, že $y < -0,05\%$ rovna 19,14%, bude pravděpodobnost, že y spadne do druhého intervalu mezi -0,09% a -0,05%, rovna $19,14\% - 5,51\% = 13,63\%$.

V dalším kroku vypočteme hodnoty kurzů ve splatnosti opce, za předpokladu, že nastane změna kurzu rovná středu každého z intervalů. Posléze spočteme zisk z opce při takovém kurzu. V posledním kroku zvážíme zisky pravděpodobnostmi, že změna kurzu spadne do příslušného pásma. Součtem těchto vážených zisků získáme očekávanou cenu opce ve splatnosti.

Pásmo	Střed pásma	Kurz ve splatnosti	Zisk	Pravděpodobnost nastání	Vážený zisk
1	-0,100%	27,398	0,398	5,51%	0,0219
2	-0,070%	27,406	0,406	13,63%	0,0554
3	-0,035%	27,416	0,416	17,96%	0,0747
4	0,000%	27,426	0,426	28,27%	0,1203
5	0,035%	27,435	0,435	17,24%	0,0750
6	0,070%	27,445	0,445	12,58%	0,0559
7	0,100%	27,453	0,453	4,81%	0,0218
Celkem					0,3477

Hodnota opce ve splatnosti vychází kolem 0,3477. Odlišnost od dříve vypočtené hodnoty 0,425 je dána zjednodušením vzniklým převedením hodnot na malý počet pásem. V posledním kroku pak bychom opět diskontovali tuto hodnotu k současnosti; při přesnosti na 3 desetinná místa se však výsledek neliší.

4 Modifikace pro put opci

V minulých kapitolách byl uveden návod, jak oceňovat call opci. Můžeme se proto ptát, jakým způsobem by bylo nutné postup modifikovat, pokud bychom chtěli ocenit opci put. Rozdíl mezi call a put opcí spočívá pouze v zisku z opce v momentu uplatnění. Na rozdíl od call opce je put opce zisková, pokud je spotový kurz ve splatnosti *nižší* než realizační cena. Zisk z put opce ve splatnosti p_T může být zapsán jako funkce spotového kurzu ve tvaru

$$p_T(S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}) = \max\left\{K_{\mathrm{CZK/EUR}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}\ ;\ 0\right\}. \qquad (29)$$

Vše ostatní vyřčené pro call opci, včetně veškerého výkladu ohledně volatility a stanovení scénářů kurzů ve splatnosti, platí beze zbytku i pro opci put. Výsledný vzorec pro cenu put opce ve splatnosti p_T je proto

$$\begin{aligned} p_T &= \mathbb{E}\left\{\max\left\{K_{\mathrm{CZK/EUR,T}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,T}}\ ;\ 0\right\}\right\} = && (30)\\ &= \mathbb{E}\left\{\max\left\{K_{\mathrm{CZK/EUR,0}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}\cdot(1+y)\ ;\ 0\right\}\right\} = && (31)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot\max\left\{K_{\mathrm{CZK/EUR,0}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}\cdot(1+y)\ ;\ 0\right\}\mathrm{d}y. && (32)\end{aligned}$$

V okamžiku prodeje má opce hodnotu ve výši svého očekávaného zisku ve splatnosti (své očekávané ceny ve splatnosti) po diskontování k současnosti diskontní mírou platnou pro korunový trh:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{p_T}{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T} = && (33)\\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot\max\left\{K_{\mathrm{CZK/EUR,0}} - S_{\mathrm{CZK/EUR,0}}\cdot(1+y)\ ;\ 0\right\}\mathrm{d}y}{(1+r_{\mathrm{CZK}})^T}. && (34)\end{aligned}$$

5 Co má vliv na oceňování opcí?

Z představeného modelu, stejně jako z oceňovacího vzorce Black-Scholesova modelu, je patrné, že na hodnotu opce má vliv 6 faktorů[12]. Zde prozkoumáme proč.

[12]Počet faktorů ale závisí na užitém modelu. Lze si představit složitější model, který by obsahoval faktorů více.

Cenu opcí obecně ovlivňují tři okruhy. U každého z nich je uvedeno, který z faktorů ovlivňuje který okruh. Některé faktory pak ovlivňují okruhů více.

- **Rozdělení spotového kurzu v době expirace.** $S_{\mathrm{CZK/EUR}}, r_{\mathrm{CZK}}, r_{\mathrm{EUR}}, \sigma, T$.
- **Realizační cena a z ní vyplývající zisk v době expirace.** K.
- **Diskontní míra pro převod na současnou hodnotu.** r_{CZK}, T.

Jakým způsobem jednotlivé faktory působí, nyní blíže vysvětlíme.

- **Realizační cena** K. Realizační cena ovlivňuje, jak moc bude v okamžiku realizace opce výhodná.
  - **Call opce.** Call opce je tím výhodější, čím *vyšší* je ve splatnosti platný kurz oproti realizační ceně, protože pak umožní držiteli koupit měnu levněji než na trhu. Za jinak stejných podmínek ohledně budoucího spotového kurzu tedy **vyšší realizační cena snižuje výhodnost opce.**
  - **Put opce.** Put opce je tím výhodější, čím *nižší* je ve splatnosti platný kurz oproti realizační ceně, protože pak umožní držiteli prodat měnu dráže než na trhu. Za jinak stejných podmínek ohledně budoucího spotového kurzu tedy **vyšší realizační cena zvyšuje výhodnost opce**
- **Současný spotový kurz** $S_{\mathrm{CZK/EUR},0}$. Dnešní spotový kurz je základem pro stanovení, jak vysoký může být spotový kurz v okamžiku realizace opce (určuje střed hodnot rozdělení).
  - **Call opce.** Jak bylo řečeno, call opce je tím výhodější, čím *vyšší* je ve splatnosti platný kurz oproti realizační ceně, protože pak umožní držiteli koupit měnu levněji než na trhu. Pokud je dnes spotový kurz vyšší, dá se očekávat, že kurz bude vyšší i v okamžiku realizace (např. je-li dnešní kurz 27,4 CZK/EUR a opce má splatnost měsíc, nedá se odčekávat příliš velká odchylka od této úrovně). **Vyšší současný kurz zvyšuje výhodnost opce.**
  - **Put opce.** Jak již bylo řečeno, put opce je tím výhodější, čím *nižší* je ve splatnosti platný kurz oproti realizační ceně, protože pak umožní držiteli prodat měnu dráže než na trhu. Pokud je dnes spotový kurz nižší, dá se očekávat, že kurz bude nižší i v okamžiku realizace. **Vyšší současný kurz snižuje výhodnost opce.**
- **Úrokové sazby na bazickou měnu** r_{CZK}. Dnešní úrokové sazby na bazickou měnu ovlivňují ceny opcí dvojím způsobem. Jednak vyšší úrokové sazby znamenají vyšší diskontní faktor pro převedení měny na současnou hodnotu. To ovlivní jak call, tak put opce a povede k jejich nižší výhodnosti a nižším cenám. Dále skrze nekrytou úrokovou paritu ovlivňují očekávání o budoucím spotovém kurzu. Tento případ prozkoumejme zvlášť pro call a pro put opci.

- **Call opce.** Pokud jsou úrokové sazby na bazickou měnu vyšší, za jinak stejných podmínek ohledně úrokových sazeb na obchodovanou měnu by měla podle parity úrokové míry bazická měna (CZK) oslabit a obchodovaná měna (EUR) posílit. To způsobí, že budoucí spotový kurz bude relativně vyšší (více CZK za 1 EUR) a call opce stane výhodnější.
- **Put opce.** Pokud jsou úrokové sazby na bazickou měnu nižší, za jinak stejných podmínek ohledně úrokových sazeb na obchodovanou měnu by měla bazická měna (CZK) posílit a obchodovaná měna (EUR) oslabit. To způsobí, že budoucí spotový kurz bude relativně nižší (méně CZK za 1 EUR) a put opce se stane výhodnější.

Shrnuto, u call opce při růst sazby na bazickou měnu převáží výhodnost opce zvyšující efekt na budoucí kurz nad efektem snížení hodnoty opcí kvůli vyšší diskontní míře. U put opce oba efekty působí stejným směrem a růst sazby povede k nižší výhodnosti opce.

- **Úrokové sazby na obchodovanou měnu** r_{EUR}. Dnešní úrokové sazby na obchodovanou měnu mají vliv na očekávání ohledně budoucího spotového kurzu.
  - **Call opce.** Pokud jsou úrokové sazby na obchodovanou měnu nižší, za jinak stejných podmínek ohledně úrokových sazeb na bazickou měnu, měla by podle parity úrokové míry bazická měna (CZK) oslabit a obchodovaná měna (EUR) posílit. To způsobí, že budoucí spotový kurz bude relativně vyšší (více CZK za 1 EUR) a call opce stane výhodnější.
  - **Put opce.** Pokud jsou úrokové sazby na obchodovanou měnu vyšší, za jinak stejných podmínek ohledně úrokových sazeb na obchodovanou měnum měla by podle parity kupní síly bazická měna (CZK) posílit a obchodovaná měna (EUR) oslabit. To způsobí, že budoucí spotový kurz bude relativně nižší (méně CZK za 1 EUR) a put opce se stane výhodnější.
- **Volatilita spotového kurzu** σ. Vyšší volatilita spotového kurzu znamená, že hodnoty budoucího spotového kurzu budou dále od sebe. Protože držitel opce má možnost volby, nastane-li velký pohyb kurzu pro něj příhodným směrem, inkasuje velký zisk. Naopak, pokud nastane velký pohyb kurzu pro něj nepříznivým směrem, jeho zisk bude omezen nulou. Vysoká volatilita proto přináší vyšší očekávané zisky. Jinými slovy, **vyšší volatilita vede k vyšší výhodnosti put i call opce**. Jinak řečeno, je-li pro držitele opce formou pojištění proti riziku pohybu kurzu, pak při větším riziku je jeho výhoda z držby opce větší (zamezí riziku velkých kurzových ztrát) a měl by platit za toto pojištění vyšší pojistné, tedy vyšší opční prémii.
- **Doba expirace** T. Doba do expirace se projeví na 3 místech. Jednak ovlivňuje velikost budoucích očekávaných pohybů kurzu: při delším intervalu se vlivem odlišného úrokového diferenciálu bude budoucí spotový kurz více odchylovat od dnešního kurzu (tj. vliv na střední hodnotu rozdělení změn a budoucích spotů). Rovněž s delším obdobím bude mít volatilita

větší prostor se projevit, a tedy jednotlivé změny kurzu se budou více lišit od jejich střední hodnoty (tj. vliv na směrodatnou odchylku rozdělení změn a budoucích spotů). Posledně, délka ovlivňuje diskontní faktor, kdy delší interval znamená vyšší diskont (dělení vyšším číslem) při převodu na současnou hodnotu. Ze všech těchto faktorů má obvykle[13]nejvyšší dopad vliv doby expirace na volatilitu. **Vyšší doba expirace** tedy **bude znamenat vyšší výhodnost call i put opce.**

Zde prezentované vlivy demonstrují logiku Black-Scholesova modelu. Zbývá dodat, že důvodem, proč se v BS modelu vyskytují kvantily normálního rozdělení, je ten, že změny kurzu jsou předpokládány jako normálně rozdělené, stejně jako v našem modelu. Logaritmus v BSM modelu vzniká, protože jsou-li výnosy normální, pak spotové kurzy v době expirace mají rozdělení lognormální[14] rozdělení. Proto je logaritus aplikován na samotné kurzy, tj. S a K.

Na obrázcích 3 a 4 je ukázán vliv zmíněných faktorů. Vyjdeme ze situace call (respektive put) opce s parametry $S_{\mathrm{CZK/EUR}} = K_{\mathrm{CZK/EUR}} = 27$, $\sigma_{\mathrm{D}} = 0,004497$, $r_{\mathrm{CZK}} = 0,8\%$, $r_{\mathrm{CZK}} = 1,0\%$, $T = 0,25$ a budeme měnit hodnotu vždy jednoho z parametrů (kromě spotového kurzu, protože ten působí společně s vlivem realizační ceny, tudíž není nutné zkoumat oba faktory samostatně). Kromě potvrzení předchozího textu se ukazuje, že kvalitativně jsou vlivy faktorů stejné jako u Black-Scholesova modelu. Rozdíly v cenách opcí u zde prezentovaného modelu a Black-Scholesova modelu spočívají v tom, že Black-Scholes užívá spojité úročení, kdežto náš model užívá složené úročení. Protože pro malé sazby je rozdíl mezi způsoby úročení malý, odchylky v cenách opcí jsou patrné pouze v případech, kdy je jedna ze sazeb značně vysoká (vyšší než cca 15 %).

6 V čem je model zjednodušený?

Nyní se podívejme na případné nedokonalosti prezentovaného modelu. Model sestával ze tří částí.

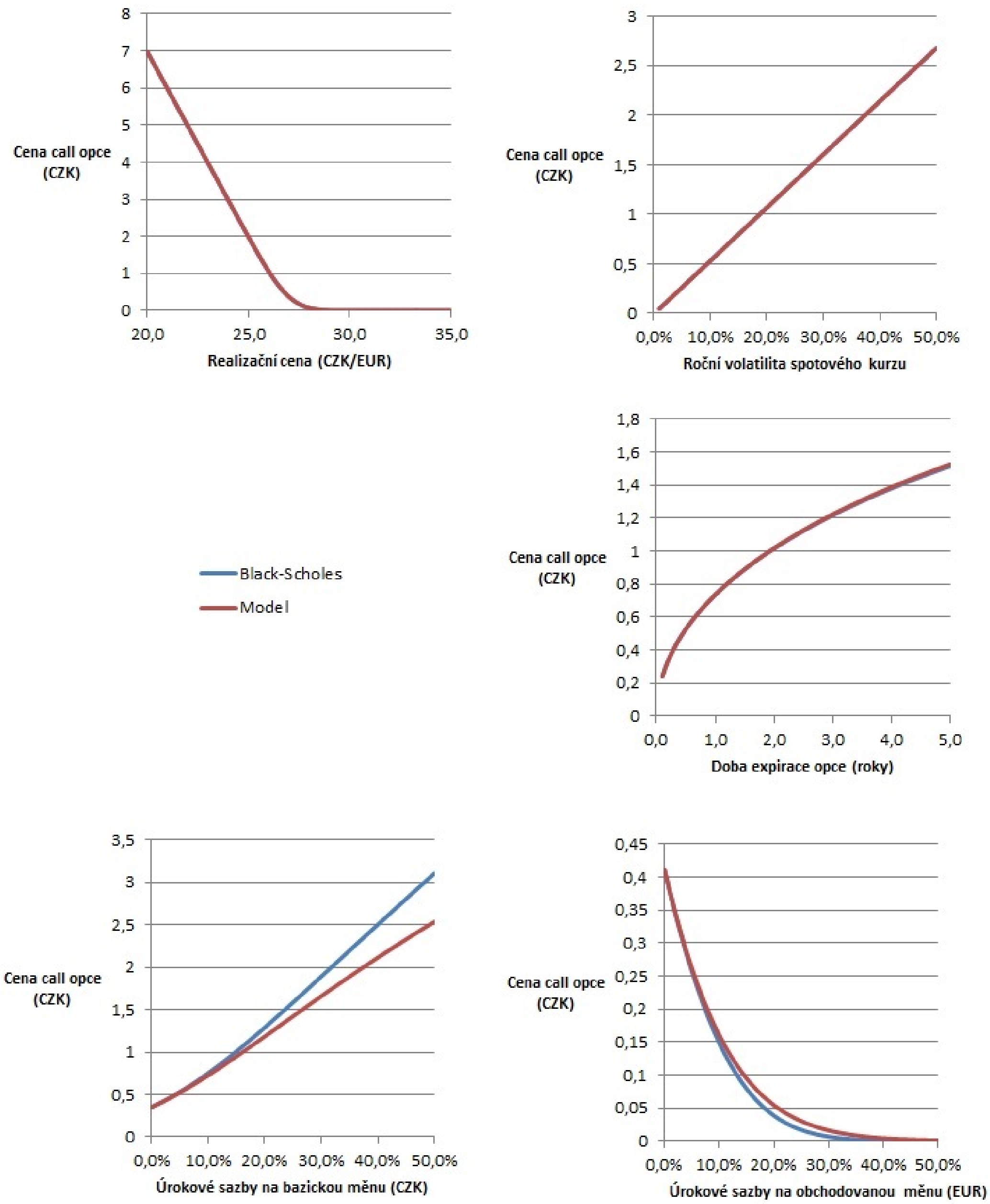
1. **Prognóza kurzu ve splatnosti.**
2. **Převod kurzu ve splatnosti na cenu opce ve splatnosti.**
3. **Diskontování ceny opce ve splatnosti k současnosti.**

Posuďme, ve kterých částech byl model zjednodušen.

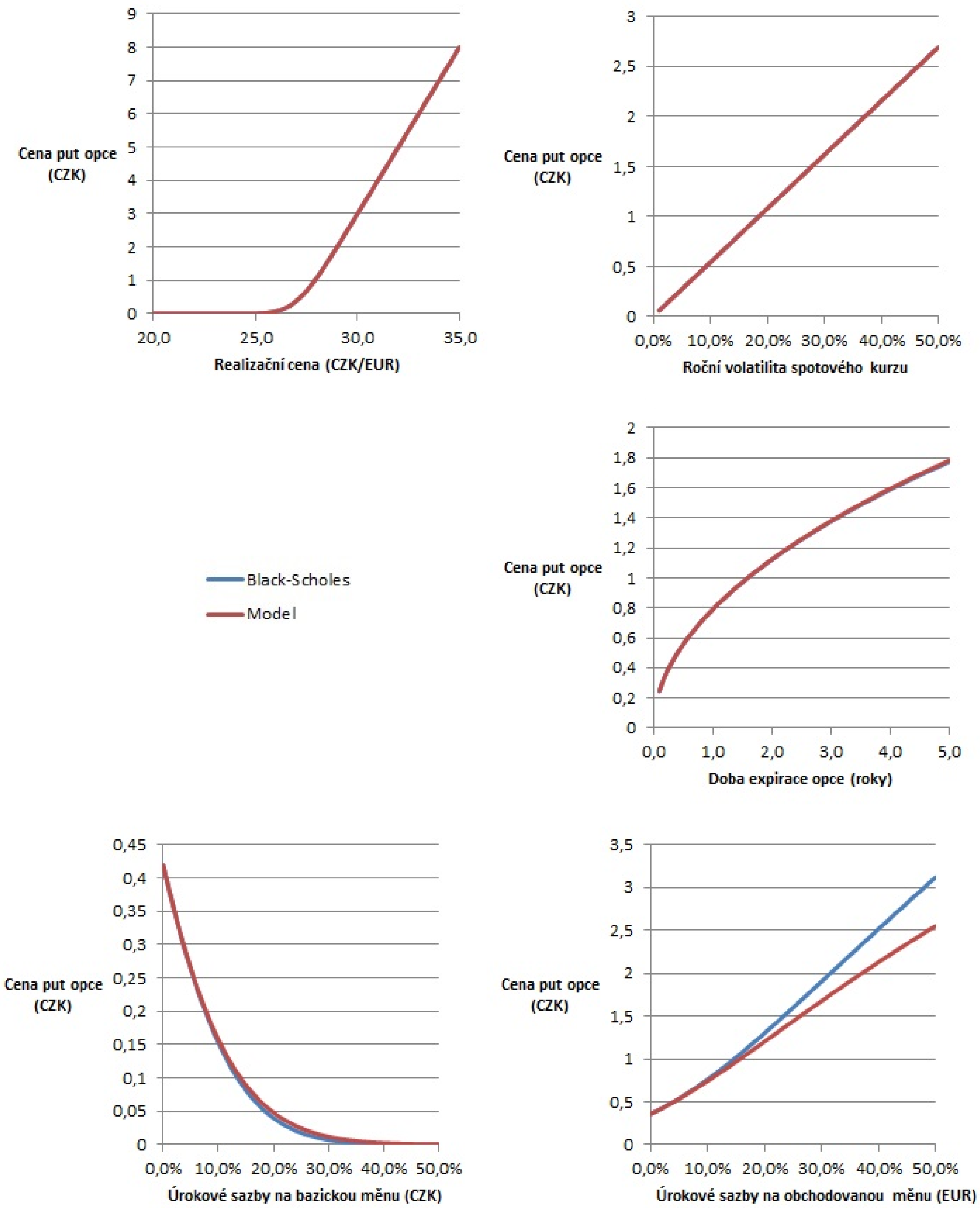
Bod 2. Zde nemá model zjevné nedostatky. Pouze v případě, že by investor do opce nebyl rizikově neutrální, by nebyla střední hodnota zisku z opce dobrou reprezentací ceny opce. Například, byl-li by rizikově averzní, měla by pro něj opce nižší cenu než je střední hodnota, protože existence případů, kdy by z opce

[13]Nemusí tomu ale být vždy. Představte si situaci se stejnými a zároveň poměrně vysokými úrokovými sazbami na obě měny a minimální volatilitou. Pak převládne vliv doby expirace na diskontní faktor, který snižuje ceny opcí.

[14]Řekneme, že veličina X má lognormální rozdělení, pokud veličina $\log X$ má normální rozdělení. Pro $\log X$ platí, že pro malé změny $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \log X_t - \log X_{t-1}$ Pokud tedy sledujeme kolísání kurzů jako procentní změny a tedy i jako rozdíly logaritmů, mají kurzy v expiraci lognormální rozdělení.



Obrázek 3: Ceny **call** opce s výchozími parametry $S_{\mathrm{CZK/EUR}} = K_{\mathrm{CZK/EUR}} = 27$, $\sigma_{\mathrm{D}} = 0,004497$, $r_{\mathrm{CZK}} = 0,8\%$, $r_{\mathrm{CZK}} = 1,0\%$, $T = 0,25$ v závislosti na velikosti jednotlivých parametrů.



Obrázek 4: Ceny **put** opce s výchozími parametry $S_{\mathrm{CZK/EUR}} = K_{\mathrm{CZK/EUR}} = 27$, $\sigma_{\mathrm{D}} = 0,004497$, $r_{\mathrm{CZK}} = 0,8\%$, $r_{\mathrm{CZK}} = 1,0\%$, $T = 0,25$ v závislosti na velikosti jednotlivých parametrů.

neměl nic, by znamenala, že by investor byl za opci ochoten zaplatit méně. V oceňování derivátů, vzhledem k profesionalitě protistran a možností arbitráží se obyčejně pracuje s rizikovou neutralitou. Dále by mohla vzniknout komplikace ohledně kreditního rizika. Pokud by držitel opce nevěřil, že vypisovatel dostojí svým závazkům z opce, žádal by za opci slevu.

Bod 3. Zde opět model netrpí zjevnými nedostatky. Komplikací by mohlo například být, pokud by sujekt nebyl schopnen pracovat s korunovou úrokovou mírou, která je použita k výpočtu střední hodnoty kurzu ve splatnosti, například proto, že jde o malého klienta který nedosáhne na tak dobré podmínky, jaké mají velcí hráči, jejichž operace stanovují budoucí kurzy. Pak by bylo nutné diskontovat jinou (v tomto případě nižší) diskontní mírou, která lépe odráží investiční příležitosti. Protože však ceny opcí stanovuje celý trh a nikoli jednotlivý investor, pro tržní ocenění opce není tento případ relevantní.

Bod 1. Jedná se o nejsložitější krok ocenění a zde existuje řada problémů.

- Bylo předpokládáno, že se střední hodnota stanoví na základě úrokového diferenciálu. Zde může být problém s tím, jakými sazbami úrokový diferenciál naplníme (obvykle se pracuje ze sazbami mezibankovního trhu, zde by byl relevantní PRIBOR a EURIBOR stejné splatnosti, na kurz ale mohou mít vliv i operace za jiných podmínek, například akciové obchody). Též další faktory (například očekávání reakce centrální banky s vlivem na kurz) mohou hrát roli ohledně odhadů budoucího spotu.

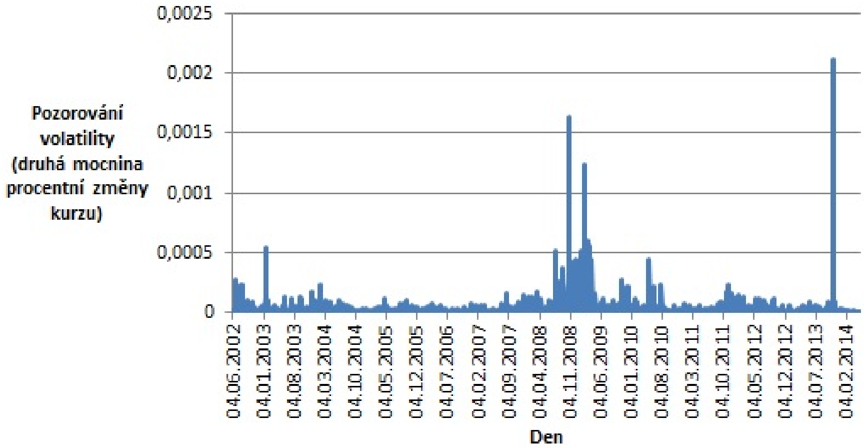
- Bylo předpokládáno, že procentní denní změny kurzů mají normální rozdělení. Normální rozdělení dává velmi dobrý smysl pro určité situace (např. výška jedince), není však důvod, proč by změny kurzů měly mít právě toto rozdělení. To, že se rozdělení běžně užívá a že se s ním dobře pracuje, není argumentem.

- Volatilita (směrodatná odchylka) byla odvozena z minulých dat o denních výnosech. Tím mlčky předpokládáme, že se minulost bude opakovat (alespoň, co se týče volatility) a proto minulé změny kurzů jsou relevantní pro předpověď budoucí volatility. Volatilita ale není v čase konstantní a může se měnit, jak je vidět z obrázku 5. Použijeme-li špatný odhad volatility, samozřejmě nám to zkreslí odhad ceny opce.

- Převod denní volatility na volatilitu za celé období byl učiněn za předpokladu, že jsou mezidenní změny sériově nezávislé. Jinými slovy, velikost mezidenní změny v jednom okamžiku neříká nic o velikosti mezidenní změny v jiných okamžicích. To neodpovídá realitě - běžně se stává, že období vysoké volatility (anebo naopak období nízké volatility) nastávají ve shlucích. Pak vysoká mezidenní změna dnes obvykle značí velkou šanci, že bude vysoká mezidenní změna i zítra: například dnes došlo ke skokovému posílení koruny, tak pro zítřek lze očekávat korekci a oslabení koruny.

- Tím, že užíváme data s určitou frekvencí vzorkování (např. denní), může se stát, že náš odhad podhodnotí skutečnou volatilitu proběhlou mezi pozorováními. Například, byl-li včera v rozhodném okamžiku kurz 27,5, následně vystoupal až na 27,9 a do dnešního odečítacího okamžiku opět poklesl na 27,5, tento fakt vyhodnotíme jako nulový mezidenní pohyb a nulovou volatilitu, přestože kurz ve skutečnosti kolísal a to nikoliv málo.

Pro měření volatility je proto výhodné mít data s co nejvyšší frekvencí sledování.



Obrázek 5: Shlukování volatility u kurzu CZK/EUR při denní frekvenci pozorování.

Jak je vidět, oceňování opcí může být daleko složitější, než bylo uvedeno v našem modelu. Stejné problémy ale nastávají i u Black-Scholesova modelu. Oceňování opcí proto není jednoznačnou záležitostí a existuje prostor ke stálému vylepšování metodiky.

7 Závěr

Model oceňování opcí prezentovaný v tomto článku nabízí intuitivnější pohled na oceňování opcí než matematizovaná teorie Black-Scholesova modelu. Přesto pomocí něj lze dospět ke stejným závěrům jak ohledně důležitých faktorů, které ovlivňují ceny opce, tak i samotných cen opcí. Z tohoto důvodu je uvedený postup vhodný zejména pro výuku oceňování opcí. Model však lze užít i jako základní kámen pro komplikovanější nadstavby. Například lze podobným způsobem dojít k oceňovacím formulím, pokud nebude rozdělení procentních změn kurzu normální a/nebo tyto změny budou v čase korelované.

Reference

[1] Biger, N. a Hull, J. (1983). The Valuation of Currency Options. *Financial Management* 12, 24-28.

[2] Black, F. a Scholes, M. S. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

[3] Durčáková, J. a Mandel, M. (2007). *Mezinárodní finance.* 3. rozšířené a doplněné vydání. Praha: Management Press.

[4] Garman, M. B. a Kohlhagen, S. W. (1983). Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance* 2 (3), 231-237.

[5] Hull, J. C. (2009). *Options, Futures and Other Derivatives.* Seventh Edition. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.

[6] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), 141-183.

[7] Pilbeam, K. (2006). *International Finance.* Third Edition. New York: Palgrave Macmillan.